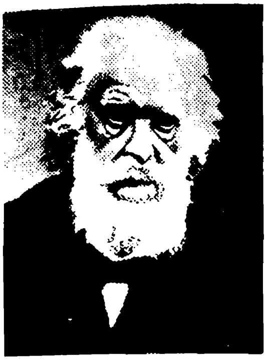

Н. А. Умов

1846—1915

О движении энергии

Открытие закона сохранения энергии явилось одним из высших достижений физики XIX в. Уже в знаменитой работе Г. Гельмгольца «О сохранении силы» была доказана эвристическая мощь этого закона, позволяющего с единых позиций рассмотреть явления, относящиеся к различным разделам физики. В дальнейшем идея сохранения энергии была развита в работах других физиков. Однако освоение обобщенного понятия энергии встречало немалые трудности. В частности, дискуссии развернулись вокруг понятия «потенциальная энергия». Суть проблемы можно понять из высказывания А. Пуанкаре: «Чтобы материализовать энергию, ее нужно локализовать; в отношении кинетической энергии это просто, но не так дело обстоит с энергией потенциальной. Где локализовать потенциальную энергию, вызванную притяжением двух небесных тел? В одном из двух? В обоих? В промежуточном пространстве?» Уточнению многих вопросов, связанных с энергетическими процессами, в значительной мере способствовало исследование русского физика Н. А. Умова, в котором впервые был поставлен вопрос о движении самой энергии.

Николай Алексеевич Умов родился 4 февраля 1846 г. в Симбирске в семье военного врача. Отец проявлял большую заботу об образовании детей, и Николай и его брат получили хорошую домашнюю подготовку. Гимназию Умов закончил в Москве в 1863 г. и в том же году поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. В 1867 г. он окончил университет со степенью кандидата и был оставлен для подготовки к профессорскому званию. Примерно в это же время начинается преподавательская деятельность Умова в женской гимназии и народной школе.

В 1869 г. Умов стал доцентом Новороссийского (Одесского) университета по кафедре физики. С этим учебным заведением связаны последующие двадцать лет жизни ученого. В это время были выполнены его важнейшие теоретические исследования. В 1871 г. он защитил магистерскую диссертацию «Теория термомеханических явлений в твердых упругих телах», а в 1874 г. — докторскую диссертацию «Уравнения движения энергии в телах».

В середине 70-х годов Умов решил задачу о распределении электрических токов на поверхности произвольного типа. Эти работы Умова были с интересом восприняты зарубежными учеными, с которыми он познакомился во время поездки в Германию, Францию и Англию.

В 1893 г. Умов вернулся в Москву и начал читать курс теоретической физики в университете. После смерти А. Г. Столетова в 1896 г. он возглавил кафедру физики. Вместе с П. Н. Лебедевым Умов принял деятельное участие в составлении проекта и постройки здания Физического института университета, в котором он заведовал физическим кабинетом и имел небольшую лабораторию. Будучи талантливым теоретиком, Умов живо интересовался физическим экспериментом и сам ставил опыты. В Москве он провел цикл исследований по хроматической деполяризации рассеянного света. В 1900-е годы Умов проводит глубокий анализ сложных формул Гаусса в теории земного магнетизма, что позволило определить вековые изменения магнитного поля Земли.

На протяжении всей жизни Умов активно участвовал в общественной жизни. Он был организатором ряда просветительских обществ, в течение 17 лет избирался президентом Московского общества испытателей природы, редактировал научно-популярные журналы. Умов часто выступал с пропагандой научных знаний. Успеху просветительской деятельности Умова способствовал его талант педагога. Лекции Умова в университете непременно собирали обширную аудиторию. Для характеристики Умова как ученого и человека следует добавить, что он живо откликался на достижения физической науки начала XX в., был одним из первых русских ученых, кто оценил значение теории относительности. Высокая гражданская позиция Умова проявилась в его уходе вместе с группой ведущих профессоров из Московского университета (1911) в знак протеста против реакционных действий царского министра просвещения Кассо. Н. А. Умов умер 28 января 1915 г.

Научное творчество Умова и судьба его работ отражает состояние физической науки в России в конце XIX — начале XX вв. Теоретическую физику Умов изучал самостоятельно по трудам Г. Ламе, Р. Клебша и Р. Клаузиуса — в русских университетах такого курса до Умова не читали. Отсюда происходил и интерес к проблемам механики и термодинамики, характерный для первых работ ученого. Самообразование во многом определило независимость и оригинальность суждений и идей Умова. Это прежде всего относится к его работе «Уравнение движения энергии в телах», в которой впервые были введены такие понятия, как плотность энергии в данной точке среды, поток энергии, представления о направлении и скорости движения энергии. Сам Умов, однако, не обобщил эти понятия на другие виды энергии, ограничившись подробным рассмотрением движения энергии в упругих телах. В 1884 г. понятие о потоке электромагнитной энергии было введено английским физиком Дж. Пойнтингом, который ввел для описания распространения энергии вектор, называемый ныне «вектором Умова—Пойнтинга». Причина, по которой Умов не развил свои идеи в более общем виде, возможно, связана с тем, что в период подготовки докторской диссертации Умовым идеи теории Максвелла еще не стали общепринятыми. Кроме того, могло сказаться и отсутствие питательной научной среды, способной оценить эти идеи. Серьезная школа теоретической физики сложилась в России лишь после Октябрьской революции.

Уравнения движения энергии в телах

I. Общее выражение закона сохранения энергии в элементе объема среды

§ 1. Определения и задачи исследования. Элемент объема, произвольно взятый внутри какой-нибудь среды, частицы коей находятся в движении, заключает в данный момент времени определенное количество энергии. Эта энергия слагается из двух частей: из живой силы движения частиц элемента объема и потенциальной энергии, т. е. работы, которая может быть отдана этими частицами при возвращении их из данного положения в некоторое начальное, соответствующее устойчивому равновесию. Под энергией элемента я буду разуметь сумму живых сил частиц элемента и его потенциальной энергии, определенной, как было сказано выше.

Законы перехода энергии с одного элемента среды на другой определялись до сих пор только для частных форм движений. Задача настоящего труда заключается в установлении на общих началах учения о движении энергии в средах.

Раскрытие общей связи между распределением и движением энергии в средах и перемещениями их частиц независимо от частных форм движений должно дать возможность из известных законов движения и распределения энергии в теле выводить заключения о роде движений его частиц. Задачи подобного рода имеют важность ввиду стремления современной физики сводить все явления природы на явления движения.

Простейшие опытные данные, на которые могли бы опереться теоретические изыскания современной физики, идущие в указанном направлении, представляют распределения и движения энергии в различных явлениях природы. Орудия опытного исследования не настолько, однако, усовершенствованы, чтобы давать возможность определять законы каждой из составных частей энергии в отдельности. Поэтому важно отыскать метод, который позволил бы перейти из определенных путем опыта законов движения энергии к дифференциальным уравнениям движения частиц тела, которое, по предположению, дает место наблюдаемому явлению.

§ 2. Уравнение сохранения энергии в элементе тела. Представим себе однородную среду с определенными границами, конечными или бесконечно большими. Пусть на частицы этой среды не действуют внешние силы и прилив энергии к частицам обусловливается принятием или отдачей энергии средой через ее границы.

Если мы выделим мысленно элемент объема, изменение его энергии (т. е. суммы его живой силы и потенциальной энергии) по закону сохранения энергии может совершиться только за счет прибыли или убыли последней в смежных элементах. Математическое выражение связи приращения количества энергии в элементе объема с ее потерями в смежных элементах и будет математическим выражением элементарного закона сохранения энергии в средах.

Математическое выражение указанной связи может быть нами почерпнуто из явления иного рода, опирающегося на закон, аналогичный закону сохранения энергии. Распределение вещества при движениях непрерывной сжимаемой среды подчиняется закону сохранения вещества. Насколько движение энергии и движение сжимаемого вещества обусловливаются законом их сохранения, настолько мы имеем право уподоблять движение энергии движению подвижного и сжимаемого вещества.

Количество энергии в элементе объема среды, отнесенное к единице объема, может быть названо плотностью энергии в данной точке среды.

Мы можем следить за изменениями, происходящими в количестве энергии и ее скоростях в одной и той же точке пространства или же в одном и том же движущемся количестве [массе] энергии.

Обозначим $Э$ плотность энергии в произвольной точке среды, т. е. частное из количества энергии, заключенного внутри бесконечно малого элемента объема, на этот элемент. Назовем через l_x, l_y, l_z слагающие по прямоугольным осям координат x, y и z скорости, с которой энергия движется в рассматриваемой точке среды.

Вообразим себе элемент объема $dxdydz$. При введенных нами обозначениях количества энергии, входящие и выходящие через различные стороны элемента, будут:

через сторону $dydz$ и ей параллельную

$$Эl_x dydz \text{ и } -(Эl_x + \frac{\partial Эl_x}{\partial x} dx)dydz;$$

через сторону $dxdz$ и ей параллельную

$$Эl_y dxdz \text{ и } -\left(Эl_y + \frac{\partial Эl_y}{\partial y} dy\right) dxdz;$$

через сторону $\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ и ей параллельную

$$Эl_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ и } -\left(Эl_z + \frac{\partial Эl_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Сумма этих величин, представляющих токи энергии, дает нам отнесенное к единице времени изменение количества энергии $Э\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ в элементе объема с временем t. Следовательно, делая сокращения, имеем

$$-\frac{\partial Э}{\partial t} = \frac{\partial Эl_x}{\partial x} + \frac{\partial Эl_y}{\partial y} + \frac{\partial Эl_z}{\partial z}. \qquad (1)$$

Здесь $\partial Э/\partial t$ есть частная производная от $Э$ по времени. Выражение (1), аналогичное с выражением закона сохранения вещества в гидродинамике, есть выражение элементарного закона сохранения энергии в телах.

Означая через $\mathrm{d}Э/\mathrm{d}t$ полную производную от $Э$ по времени, мы находим следующее выражение для изменения плотности энергии с временем в одной и той же движущейся массе энергии:

$$\frac{\mathrm{d}Э}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial Э}{\partial t} + \frac{\partial Э}{\partial x}l_x + \frac{\partial Э}{\partial y}l_y + \frac{\partial Э}{\partial z}l_z. \qquad (2)$$

Соединяя выражение (2) с (1), находим

$$-\frac{1}{Э}\frac{\mathrm{d}Э}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial l_x}{\partial x} + \frac{\partial l_y}{\partial y} + \frac{\partial l_z}{\partial z}. \qquad (1')$$

Аналогия между дифференциальными законами движения энергии и движения вещества вообще не простирается далее сходства уравнений (1) и (1′) с соответствующими уравнениями гидродинамики.

Выражение (1) открывает связь между количеством энергии, отнесенным к единице времени, втекающим в среду через ее границы и изменением количества энергии в среде. Мы находим

$$\iiint \frac{\partial Э}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint Эl_n\mathrm{d}\sigma = 0, \qquad (3)$$

где тройной интеграл распространяется на весь объем среды, $\mathrm{d}\sigma$ представляет элемент ее границы и l_n есть скорость движения энергии по внешней нормали n к элементу границы, т. е.

$$l_n = l_x\cos(nx) + l_y\cos(ny) + l_z\cos(nz). \qquad (4)$$

§ 3. Связь законов движения энергии с законами частичных движений сред. Дифференциальные законы движений частиц различных сред дают, как известно, возможность установить математическое выражение, представляющее закон сохранения энергии для всей среды. Если через δJ обозначим приращение живой силы в элементе объема среды, через δW — приращение работы частичных сил элемента и через δL — приращение работы давлений на элементе $\mathrm{d}\sigma$ поверхности тела, причем все эти приращения отнесены к единице времени, мы всегда имеем возможность по основным дифференциальным законам движений частиц среды составить следующее выражение, причем предполагается, что внешние силы не действуют на частицы среды:

$$\iiint(\delta J+\delta W)\mathrm{d}\omega+\iint\delta L\mathrm{d}\sigma=0. \tag{5}$$

В этом выражении $\mathrm{d}\omega$ представляет элемент объема среды, тройной интеграл распространяется на всю среду, а двойной — на ее поверхность. Выражение (5) представляет не что иное, как закон сохранения энергии для всей среды.

Для данной среды подобное выражение может быть составлено еще другим образом исходя из уравнения (1). Умножим обе части этого уравнения на элемент объема $\mathrm{d}\omega$ и интегрируя на всю среду, мы находим

$$\iiint\frac{\partial Э}{\partial t}\mathrm{d}\omega+\iiint\left[\frac{\partial(Эl_x)}{\partial x}+\frac{\partial(Эl_y)}{\partial y}+\frac{\partial(Эl_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}\omega=0, \tag{6}$$

или, преобразовывая второй тройной интеграл,

$$\iiint\frac{\partial Э}{\partial t}\mathrm{d}\omega+\iint Эl_n\mathrm{d}\sigma=0. \tag{7}$$

Тройной интеграл, входящий в это выражение, представляющее закон сохранения энергии для всей среды, должен быть тождествен с тройным интегралом, входящим в выражение (5). Но двойной интеграл, входящий в выражение (7), преобразуется во второй тройной интеграл выражения (6); следовательно, и двойной интеграл, входящий в выражение (5), должен преобразовываться в тройной интеграл, тождественный со вторым тройным интегралом, входящим в выражение (6). Математическое выражение этого тождества и приводит к выражениям, связывающим законы движения и распределения энергии с частичными движениями сред.

II. Уравнения движения энергии в различных телах

§ 4. Уравнения движения энергии в твердых телах постоянной упругости. Обозначим через u, v, w перемещения по осям прямоугольных координат центра тяжести элемента объема, через p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} — нормальные и через p_{xy}, p_{yz}, p_{xz} — тангенциальные силы упругости, действующие на стороны бесконечно малого параллелепипеда (причем натяжения принимаются положительными, а давления — отрицательными), и через ρ — плотность в какой-нибудь точке среды. Полагая, далее,

$$\delta u=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u',\ \delta v=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v',\ \delta w=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=w', \tag{8}$$

мы найдем следующее выражение закона сохранения энергии для всего упругого тела:

$$\iiint \frac{\rho}{2}\delta(u'^2+v'^2+w'^2)d\omega+\iiint\Big[p_{xx}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+p_{yy}\frac{\partial\delta v}{\partial y}+p_{zz}\frac{\partial\delta w}{z}+$$
$$+p_{yz}\left(\frac{\partial\delta v}{\partial z}+\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right)+p_{xz}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\frac{\partial\delta u}{\partial z}\right)+p_{xy}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)\Big]d\omega-$$
$$-\iint\{\delta u[p_{xx}\cos(nx)+p_{xy}\cos(ny)+p_{xz}\cos(nz)]+$$
$$+\delta v[p_{xy}\cos(nx)+p_{yy}\cos(ny)+p_{yz}\cos(nz)]+$$
$$+\delta w[p_{xz}\cos(nx)+p_{yz}\cos(ny)+p_{zz}\cos(nz)]\}d\sigma=0. \qquad (9)$$

Первые два тройных интеграла представляют приращение энергии, отнесенное к единице времени, во всей упругой среде. Двойной интеграл распространяется на всю поверхность среды и представляет работу внешних давлений. Мы опускаем действие внешних сил на элементы упругой среды. Обращая внимание на значение величин δu, δv и δw по формуле (8), мы замечаем, что двойной интеграл выражения (9) преобразуется в следующий тройной интеграл:

$$\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}u'+p_{xy}v'+p_{xz}w')+\frac{\partial}{\partial y}(p_{xy}u'+p_{yy}v'+p_{yz}w')+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}(p_{xz}u'+p_{yz}v'+p_{zz}w')\right\}d\omega. \qquad (10)$$

Так как первые два тройных интеграла выражения (9) тождественны с первым тройным интегралом выражения (6), то двойной интеграл, входящий в выражение (9), взятый с тем знаком, с которым он входит в это выражение, или тождественный с ним тройной интеграл (10), взятый с отрицательным знаком, должен быть тождествен со вторым тройным интегралом, входящим в выражение (6).

Следовательно, подынтегральная функция тройного интеграла (10), взятая с отрицательным знаком, должна быть тождественна подынтегральной функции второго тройного интеграла выражения (6), или, что все равно, второй части уравнения (1). Это заключение легко проверяется при помощи основных уравнений упругости, дающих возможность преобразовать сумму подынтегральных функций первых двух тройных интегралов, входящих в выражение (9), тождественную с $\partial Э/\partial t$, в отрицательную подынтегральную функцию выражения (10). Из тождества этой последней со второй частью уравнения (1) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned}-Эl_x&=p_{xx}u'+p_{xy}v'+p_{xz}w',\\-Эl_y&=p_{xy}u'+p_{yy}v'+p_{yz}w',\\-Эl_z&=p_{xz}u'+p_{yz}v'+p_{zz}w',\end{aligned} \qquad (11)$$

откуда заключаем: *количество энергии, протекающее через бесконечно малый плоский элемент в бесконечно малое время, равно отрицательной работе сил упругости, действующих на этот элемент.*

Найденные выражения (11) представляют связь законов движения энергии с законами частичных движений твердого тела постоянной упругости. К правым частям этих выражений не прибавлены функции, зависящие только от координат (y, z), (z, x), (x, y), ибо левые части должны обращаться в нуль, когда $u' = v' = w' = 0$.

§ 5. Для выяснения найденных нами заключений приложим формулы (10) к определению скорости распространения в упругой среде плоских волн с продольными и поперечными колебаниями.

Рассмотрим колебания продольные. Пусть несущие их плоские волны неперпендикулярны оси x. Следовательно,

$$v = 0, \ w = 0. \tag{12}$$

Положим, кроме того,

$$u = A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\Omega}\right), \tag{13}$$

где Ω — искомая скорость распространения продольных колебаний. Пользуясь выражением сил упругости, данным Ламе, мы имеем в нашем случае:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}, & p_{yz} &= 0, \\ p_{yy} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, & p_{xy} &= 0, \\ p_{zz} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, & p_{xz} &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial Э}{\partial t} = \frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p_{xx}\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial x}. \tag{15}$$

Интегрируя это выражение по времени, имеем

$$Э = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{16}$$

Учитывая (13), находим

$$Э = \frac{2\pi^2 A^2}{T^2}\left(\rho + \frac{2\mu + \lambda}{\Omega^2}\right)\sin^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\Omega}\right). \tag{17}$$

С другой стороны, подставляя (13) и (14) в (11), находим:

$$-Эl_x = -(\lambda + 2\mu)\frac{4\pi^2 A^2}{\Omega T^2}\sin^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\Omega}\right),$$

$$-Эl_y = 0, \ -Эl_z = 0. \tag{18}$$

Последние два соотношения дают $l_y = 0$, $l_z = 0$. Следовательно, $l_x = \Omega$ и первое из соотношений (18) после сокращения общих факторов дает соотношение

$$\Omega\left(\rho+\frac{2\mu+\lambda}{\Omega^2}\right)=\frac{2(\lambda+2\mu)}{\Omega}, \tag{19}$$

откуда получается известный результат

$$\Omega^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}. \tag{20}$$

В случае распространения плоской волны с поперечными колебаниями мы нашли бы точно так же известное выражение для скорости распространения поперечных колебаний.

Выражения (11) дают возможность найти общие соотношения между формой волн, несущих продольные или поперечные колебания, и движениями частиц упругого тела.

Известно, что скорость распространения тех или других волн постоянна и что волны, исходящие из одной и той же поверхности сотрясения, имеют общие нормали. Обозначая c скорость распространения волны, мы имеем

$$l_x=\frac{c\partial B/\partial x}{\Delta_1 B},\quad l_y=\frac{c\partial B/\partial y}{\Delta_1 B},\quad l_z=\frac{c\partial B/\partial z}{\Delta_1 B}, \tag{21}$$

где

$$B=\mathrm{const} \tag{22}$$

есть уравнение какой-нибудь волновой поверхности, а $\Delta_1 B$ — ее дифференциальный параметр первого порядка. Мной было доказано («Закон колебаний в неограниченной среде постоянной упругости«)[1], что, выбирая за параметр B волны отрезок луча между некоторым начальным положением волны и последующим, мы имеем

$$\Delta_1 B=1. \tag{23}$$

Принимая последнее выражение и подставляя (21) в (11), находим:

$$\begin{aligned}
-\Im c\frac{\partial B}{\partial x}&=p_{xx}u'+p_{xy}v'+p_{xz}w',\\
-\Im c\frac{\partial B}{\partial y}&=p_{xy}u'+p_{yy}v'+p_{yz}w',\\
-\Im c\frac{\partial B}{\partial z}&=p_{xz}u'+p_{yz}v'+p_{zz}w'.
\end{aligned} \tag{24}$$

Эти выражения показывают, что

$$-\frac{p_{xx}u'+p_{xy}v'+p_{xz}w'}{\Im c},\quad -\frac{p_{xy}u'+p_{yy}v'+p_{yz}\,w'}{\Im c},\quad -\frac{p_{xz}u'+p_{yz}v'+p_{zz}w'}{\Im c} \tag{25}$$

суть выражения косинусов углов нормали в какой-нибудь точке волны с осями координат. Так как, по закону общих нормалей, все элементы нормалей, проведенные в соответствующих точках одной и той же волны в различных ее положениях, лежат на одной прямой, носящей название луча, то выражения (25) остаются неизменными на протяжении одного и того же луча.

Выражения (25) показывают также, что, воображая себе в какой-нибудь точке луча линию, равную по величине произведению из энергии на скорость ее распространения, величины

$$\begin{gathered}
-(p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w'),\\
-(p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w'),\\
-(p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w')
\end{gathered} \tag{26}$$

представят ее продолжение на оси координат. Возводя выражения (24) в квадрат и складывая, находим

$$Э^2c^2 = (p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w')^2 + (p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w')^2 + \\ + (p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w'). \tag{27}$$

Умножая (24) соответственно на l_x, l_y, l_z, складывая и обращая внимание на соотношения (21), находим

$$Эc^2 + (p_{xy}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w')l_x + (p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w')l_y + \\ + (p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w')l_z = 0. \tag{28}$$

Величина $Эc^2$ может быть названа *двойной живой силой движения энергии.*

§ 6. Закон энергии для волновых поверхностей произвольного вида. Вставляя в уравнение (1) выражения (21) и принимая в соображение (23), находим

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Э}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(Э\frac{\partial B}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Э\frac{\partial B}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(Э\frac{\partial B}{\partial t}\right) = 0. \tag{29}$$

Это соотношение дает связь между энергией и формой волновой поверхности, которая приводится по отношению к энергии к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка. Мы находим, раскрывая выражение (29):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Э}{\partial t} + Э\Delta_2 B + \frac{\partial Э}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial Э}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial Э}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial z} = 0. \tag{30}$$

Здесь Δ_2 означает дифференциальный параметр второго порядка.

Введем ортогональные координаты, причем параметры двух систем поверхностей, ортогональных между собой и к волновой поверхности B, обозначим ρ_1, ρ_2. Принимая во внимание условия ортогональности, мы представим выражение (30) в виде

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Э}{\partial t} + Э\Delta_2 B + \frac{\partial Э}{\partial B} = 0. \tag{31}$$

Это выраженне интегрируется при помощи совместных дифференциальных уравнений:

$$-\frac{dЭ}{Э\Delta_2 B} = c\,dt = dB. \tag{32}$$

Обозначая через f произвольную функцию, находим

$$Э = e^{-\int \Delta_2 B dB} f(ct - B,\ \rho_1,\ \rho_2). \tag{33}$$

Таково общее выражение энергии для колебаний *в одной и той же точке среды*, несомых волной произвольного вида B. $\int \Delta_2 B dB$ можно взять в общем виде, как показано будет ниже. Рассмотрим случай волны цилиндрической. Пусть ось цилиндра параллельна оси z и координаты точки ее пересечения с плоскостью xy суть a, 0, 0. Мы имеем в данном случае

$$B = r,\quad r^2 = (x-a)^2 + y^2. \tag{34}$$

Следовательно,

$$\Delta_2 B = \frac{1}{r} \tag{35}$$

и выражение (33) дает нам

$$Э = \frac{1}{r} f(ct - r,\ z, \varphi), \tag{36}$$

где φ — параметр плоскостей, проходящих через ось цилиндра.

Для волны сферической, центр которой имеет координаты a, b, c, находим

$$B = r,\ r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2. \tag{37}$$

Отсюда

$$\Delta_2 B = 2/r, \tag{38}$$

и выражение (33) дает

$$Э = \frac{1}{r^2} f(ct - r,\ \psi,\ \varphi). \tag{39}$$

Подобные результаты были известны для живой силы колебательных движений. Здесь они даны для всей энергии движения, не определяя в подробности его формы.

Из выражения (33) мы можем заключить о законе энергии в точке волны по мере ее движения вместе с волной. Я предпочитаю, однако, вывести этот закон непосредственно из основного уравнения (1′). Обращая внимание на указанный выше выбор параметра B волны, мы имеем

$$B = ct + c_1, \tag{40}$$

где c и c_1 — постоянные.

Подставляя в уравнение (1′) величины (21) и принимая во внимание (23), находим

$$\frac{1}{Э} \frac{dЭ}{dt} + c\Delta_2 B = 0, \tag{41}$$

откуда

$$Э = e^{-c\int \Delta_2 B dt} f(\rho_1,\ \rho_2). \tag{42}$$

Из (40) получаем

$$c\mathrm{d}t = \mathrm{d}B. \tag{43}$$

Кроме того, обозначая через h, h_1, h_2 дифференциальные параметры первого порядка волновой поверхности и ортогональных к ней поверхностей ρ_1, ρ_2, находим[2]

$$\Delta_2 B = hh_1h_2\frac{\mathrm{d}h/(h_1h_2)}{\mathrm{d}B}. \tag{44}$$

Замечая, что в нашем случае $h = 1$, имеем

$$\Delta_2 B = -\frac{\mathrm{d}\ln h_1h_2}{\mathrm{d}B}. \tag{45}$$

Подставляя (43) и (45) в (42) и производя интеграцию, находим

$$Э = h_1h_2f(\rho_1, \rho_2). \tag{46}$$

Элемент объема будет равен

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}B\mathrm{d}\rho_1\mathrm{d}\rho_2}{h_1h_2}. \tag{47}$$

Умножая выражение (46) на (47), находим

$$Э\mathrm{d}\omega = f(\rho_1, \rho_2)\mathrm{d}B\mathrm{d}\rho_1\mathrm{d}\rho_2. \tag{48}$$

Так как во все время движения энергии вдоль одного и того же луча величины ρ_1 и ρ_2 остаются неизменными, то их выражения (48) заключаем, что энергия целиком переносится волной от одной точки луча к другой. ⟨...⟩

Комментарий

Отрывки из работы Н. А. Умова воспроизводятся по изданию: Умов Н. А. Избранные сочинения. М. — Л., 1950, с. 151—200.

[1] Эта работа Умова была опубликована в 1870 г.

[2] Здесь Умов ссылается на «Лекции о криволинейных координатах» французского математика Г. Ламе, опубликованные в 1859 г.

Литература

[1] Умов Н. А. Избранные сочинения. М. — Л., 1950.
[2] Гуло Д. Д. Николай Алексеевич Умов. М., 1971.
[3] Гуло Д. Д. Из истории учения о движении энергии. История и методология естественных наук. М., 1965, вып. 3, с. 214—241.

Голин Г. М., Филонович С. Р.
Классики физической науки (с древнейших времен до начала XX в.): Справ. пособие. — М.: Высш. шк., 1989. — 576 с.: ил. ISBN 5-06-000058-3