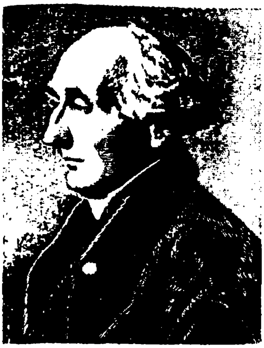

Ж. Л. Лагранж

1736—1813

Об аналитической механике

История развития классической механики представляет собой прекрасную иллюстрацию взаимного влияния естествознания и математики. Многие методы математики и даже целые ее разделы возникли при решении задач, поставленных механикой. Не случайно первое последовательное изложение механики с использованием исчисления бесконечно малых дал великий математик Л. Эйлер. Своего высшего развития механика XVIII в. достигла в трудах французского ученого Ж. Л. Лагранжа.

Жозеф Луи Лагранж родился 25 января 1736 г. в Турине, в семье казначея, разорившегося в результате неудачных финансовых предприятий. Отец хотел, чтобы сын стал адвокатом, и определил его в Туринский университет. Однако там наибольшее внимание юноши привлекли физика и математика. У него обнаружился блестящий математический талант, и в девятнадцать лет он стал профессором Артиллерийской школы в Турине.

Уже первые научные работы Лагранжа, посвященные как чисто математическим проблемам, так и задачам гидродинамики и акустики, были высоко оценены такими учеными, как Даламбер и Эйлер. Уже в 1756 г. Лагранж по представлению Эйлера был избран иностранным членом Берлинской Академии наук. Особую известность Лагранжу в начале его научной карьеры принесли исследования по вариационному исчислению.

В 1764 г. Парижская Академия наук объявила конкурс по проблеме движения Луны. Лагранж представил работу «Исследование о либрации* Луны», которая и была удостоена премии. В 1766 г. за исследование, посвященное теории движения спутников Юпитера, он удостаивается еще одной премии Парижской Академии. В том же году он становится президентом Берлинской Академии наук вместо переехавшего в Петербург Эйлера.

* Либрация — наблюдаемые периодические маятникообразные колебания Луны относительно ее центра масс.

Берлинский период (1766—1787) был самым плодотворным в жизни Лагранжа. В Берлине он подготовил важные работы по алгебре и теории чисел, а также по вопросам решения уравнений в частных производных. Там же он много занимался сферической тригонометрией и астрономическими проблемами. В Германии Лагранж подготовил и свою знаменитую «Аналитическую механику», которая была опубликована в 1788 г., уже после переезда в Париж. Во время работы в Берлине ученый был избран иностранным членом Петербургской Академии наук.

В 1787 г. после смерти короля Пруссии Фридриха II условия работы Лагранжа в Берлине ухудшились, и он переехал во Францию. Там он встретил радушный прием. Однако на некоторое время его научная работа была прервана: Лагранж вследствие переутомления тяжело заболел.

О высоком авторитете Лагранжа в Парижской Академии наук свидетельствует тот факт, что во время Великой французской революции при издании Конвентом декрета об изгнании всех иностранцев из страны для него было сделано исключение. Во время революции Лагранж был привлечен к работе комиссии, которая занималась разработкой новой метрической системы мер и весов. В 1797 г. после создания Политехнической школы в Париже, давшей впоследствии Франции блестящую плеяду ученых (Ф. Араго, Э. Малюс, О. Френель, С. Карно и др.), Лагранж ведет там активную преподавательскую работу. При открытии Института Франции (1795), заменившего Королевскую Академию наук, Лагранж избирается главой его физико-математического класса.

И в конце жизни ученый продолжает интенсивно работать над научными проблемами. В 1797 г. выходит в свет его фундаментальное сочинение «Теория динамических функций». Лагранж умер 10 апреля 1813 г.

За долгую творческую жизнь Лагранж занимался многими задачами механики. Однако вершиной этой области безусловно была «Аналитическая механика». В этой книге описано огромное число новых методов. В основу статики Лагранж положил принцип возможных перемещений, в основу динамики — сочетание этого принципа с принципом Даламбера. Он ввел обобщенные координаты и придал уравнениям динамики новую форму, а также развил принцип наименьшего действия — не случайно характеристической функции механической системы, выраженной через обобщенные координаты и время, дано название «лагранжиан». Лагранж превратил механику в общую науку о движении тел различной природы: жидких, газообразных и упругих.

Предисловие автора ко второму изданию

Существует уже много трактатов о механике, но план настоящего трактата является совершенно новым. Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи. Я надеюсь, что способ, каким я постарался этого достичь, не оставит желать чего-либо лучшего.

Кроме того, эта работа принесет пользу и в другом отношении: она объединит и осветит с единой точки зрения различные принципы, открытые до сих пор с целью облегчения решения механических задач, укажет их связь и взаимную зависимость и позволит судить об их правильности и сфере их применения.

Я делю эту работу на две части: на статику, или теорию равновесия, и на динамику, или теорию движения; в каждой из этих частей я отдельно рассматриваю твердые и жидкие тела.

В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область его применения. ⟨...⟩

ЧАСТЬ I

Статика

Раздел II

Общая формула статики для равновесия любой системы сил и метод применения этой формулы

1. Общий закон равновесия машин заключается в том, что силы относятся друг к другу обратно отношению скоростей точек, к которым они приложены, причем скорости должны измеряться по направлению этих сил.

В этом законе заключается положение, которое обычно называют *принципом виртуальных скоростей.* Как мы показали в предыдущем разделе, этот принцип уже давно известен в качестве основного принципа равновесия, в силу чего его можно рассматривать как своего рода аксиому механики.

Для того чтобы выразить этот принцип в виде формулы, допустим, что силы P, Q, R, ..., действующие по определенным направлениям, взаимно уравновешивают друг друга. Представим себе, что из точек, к которым приложены силы, отложены отрезки, равные p, q, r, ... и расположенные по направлению этих сил. Обозначим через $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$, ... вариации, или дифференциалы, этих отрезков, поскольку они могут получиться в результате какого-либо бесконечно малого изменения положения различных тел или точек системы.

Ясно, что эти дифференциалы выразят пути, которые будут пройдены в одно и то же мгновение силами P, Q, R, ... по своим собственным направлениям, если допустить, что эти силы стремятся удлинить соответственно отрезки p, q, r, ... Таким образом, дифференциалы $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$, ... будут пропорциональны виртуальным скоростям сил P, Q, R, ... и, следовательно, могут быть для простоты подставлены вместо этих скоростей.

Установив это, рассмотрим сначала только две силы P и Q, находящиеся в равновесии. Согласно закону равновесия сил, величины P и Q должны быть обратно пропорциональны дифференциалам $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$. Но легко понять, что равновесия между двумя силами не будет, если только они не будут расположены так, что, когда одна из них движется по собственному своему направлению, другая сила вынуждена двигаться в сторону, противоположную своему собственному направлению. Отсюда следует, что дифференциалы $\mathrm{d}p$ и $\mathrm{d}q$ должны иметь противоположные знаки. Поэтому, если допустить, что обе силы P и Q положительны, для равновесия получается

$$\frac{P}{Q} = -\frac{dq}{\mathrm{d}p}, \text{ или } P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}p = 0.$$

Такова общая формула равновесия двух сил.

Рассмотрим теперь равновесие трех сил P, Q, R, виртуальные скорости которых представлены дифференциалами $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$. Положим $Q = Q' + Q''$ и допустим, что часть Q' силы Q такова, что

$$P\mathrm{d}p + Q'\mathrm{d}q = 0.$$

Таким образом, сила P будет находиться в равновесии с силой Q', и для полного равновесия необходимо, чтобы другая часть Q'' той же силы Q находилась в равновесии с третьей силой R, что дает уравнение

$$Q''\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r = 0.$$

Если это уравнение связать с предыдущим, то вследствие равенства $Q' + Q'' = Q$ получим следующее уравнение:

$$P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r = 0.$$

Если имеется четвертая сила S, виртуальная скорость которой представлена дифференциалом $\mathrm{d}s$, то можно положить

$$Q = Q' + Q'' \text{ и } P\mathrm{d}p + Q'\mathrm{d}q = 0,$$

а также

$$R = R' + R'' \text{ и } Q''\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r = 0.$$

Итак, часть Q' силы Q будет находиться в равновесии с силой P; часть R' силы R будет в равновесии с другой частью Q'' силы Q, и, для того чтобы имело место полное равновесие между силами P, Q, R, S, оставшаяся часть R'' силы R должна находиться в равновесии с силой S. Таким образом,

$$R''\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s = 0.$$

Если все эти три уравнения соединить в одно, то получается

$$P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s = 0.$$

И так далее, как бы ни было велико число сил, находящихся в равновесии.

2. Итак, для равновесия любого числа сил P, Q, R, ..., направленных по линиям p, q, r, ... и приложенных любым образом, мы имеем уравнение вида

$$P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \ldots = 0.$$

Это общая формула статики для равновесия любой системы сил.

Мы назовем каждый член этой формулы, например $P\mathrm{d}p$, *моментом силы P* и примем слово «момент» в том смысле, какой ему придал Галилей, т. е. как произведение силы на ее виртуальную скорость. Тогда приведенная выше общая формула статики гласит: *сумма моментов всех сил равна нулю.*

При применении этой формулы вся трудность сводится к тому, чтобы определить значения дифференциалов $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$, ... в соответствии с природой заданной системы.

Рассмотрим теперь систему в двух различных, но бесконечно близких положениях и станем искать наиболее общие выражения для интересующих нас дифференциалов, введя в них столько неопределенных величин, сколько имеется произвольных элементов при изменении положения системы. Полученные таким образом выражения мы подставим в заданное уравнение. Это уравнение должно иметь силу независимо от всех неопределенных величин для того, чтобы равновесие системы вообще существовало и, кроме того, во всех направлениях. Приравняем нулю отдельно сумму членов, в которые входят одни и те же неопределенные величины, и таким путем получим столько отдельных уравнений, сколько имеется этих неопределенных величин. Однако нетрудно убедиться, что их число всегда будет равно числу неизвестных в положении системы. Таким образом, с помощью этого метода мы получим столько уравнений, сколько их требуется для определения состояния равновесия системы.

Этим именно методом и пользовались все авторы, применявшие до сих пор принцип виртуальных скоростей для разрешения проблем статики. Однако этот метод применения указанного принципа зачастую требует геометрических построений и рассуждений, благодаря которым решения становятся столь же длинными, как если бы их искали с помощью обыкновенных принципов статики. В этом, может быть, и заключается причина, препятствовавшая применению этого принципа во всех тех случаях, когда его следовало бы, казалось, применить благодаря его простоте и общности.

3. Задачей настоящей работы является сведение механики к чисто аналитическим операциям, и формула, которую мы выше нашли, чрезвычайно приспособлена для выполнения этой задачи. Все дело сводится только к тому, чтобы выразить аналитически и в наиболее общем виде значения отрезков p, q, r, ..., взятых по направлению сил P, Q, R, ..., и тогда путем простого дифференцирования получаются значения виртуальных скоростей $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$, ...

Следует при этом отметить, что в дифференциальном исчислении во всех тех случаях, когда несколько величин изменяются одновременно, допускают, что все они в течение одного и того же времени увеличиваются на величину своего дифференциала, и если согласно природе вопроса некоторые из них должны убывать в то время, как другие возрастают, то дифференциалам убывающих величин приписывают знак минус.

Дифференциалы $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$, ..., представляющие виртуальные скорости сил P, Q, R, ..., следует считать положительными или отрицательными в зависимости от того, стремятся ли силы увеличить или уменьшить отрезки p, q, r, ..., определяющие их направления. Но так как общая формула равновесия не изменяется при изменении знаков всех ее членов, можно с одинаковым основанием принять в качестве положительных дифференциалы тех отрезков, которые увеличиваются или же уменьшаются одновременно, и в качестве отрицательных — дифференциалы тех отрезков, которые изменяются в противоположном смысле. Таким образом, если считать силы положительными величинами, то их *моменты* $P\mathrm{d}p$, $Q\mathrm{d}q$, ... будут положительными или отрицательными в зависимости от того, будут виртуальные скорости $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, ... положительными или отрицательными. Если мы пожелаем заставить силы действовать в противоположном направлении, то нам придется только приписать знак минус тем величинам, которые представляют эти силы, или же изменить знак их моментов.

Отсюда вытекает основное свойство равновесия, заключающееся в том, что любая система сил, находящихся в равновесии, продолжает оставаться в этом состоянии, когда каждая из этих сил изменяет направление своего действия на противоположное, если только структура этой системы не претерпевает какого-либо изменения вследствие изменения направления всех сил.

4. Каковы бы ни были силы, действующие на заданную систему тел или точек, всегда можно считать, что они как бы стремятся к некоторым точкам, расположенным на линиях, по которым они направлены.

Назовем эти точки *центрами сил*; можно принять за отрезки p, q, r, ... соответствующие расстояния от этих центров до тех точек системы, в которых приложены силы P, Q, R, ... В этом случае ясно, что данные силы стремятся уменьшить отрезки p, q, r, ...

Следовательно, их дифференциалам следует сообщить знак *минус*, но если изменить все знаки, то общая формула сохранит свой вид:

$$Pdp + Qdq + Rdr + ... = 0.$$

Но центры сил могут находиться как вне системы, так и внутри самой системы, составляя часть ее; по этому признаку различают силы *внешние* и *внутренние*.

В первом случае ясно, что дифференциалы dp, dq, dr, ... выражают полные вариации отрезков p, q, r, ..., связанные с изменением положения системы. Они являются полными дифференциалами величин p, q, r, ..., если рассматривать в качестве переменных все величины, относящиеся к положению системы, и в качестве постоянных — величины, относящиеся к положению различных центров сил.

Во втором случае некоторые из тел системы сами будут центрами сил, действующих на другие тела системы, и вследствие равенства действия и противодействия эти последние, в свою очередь, будут одновременно центрами сил, действующих на первые.

Рассмотрим два тела[1], действующих друг на друга с некоторой силой P, причем эта сила может происходить вследствие притяжения или отталкивания этих тел, либо вследствие наличия пружины, находящейся между ними, либо, наконец, может происходить от какой-нибудь другой причины. Пусть p — расстояние между этими двумя телами, dp' — вариация этого расстояния, поскольку она зависит от изменения положения одного из тел. Ясно, что по отношению к этому телу Pdp' будет моментом силы P. Точно так же если через dp'' обозначить вариацию того же расстояния p, происходящую вследствие изменения положения другого тела, то по отношению к этому второму телу мы будем имѐть момент Pdp'' той же силы P. Следовательно, весь момент, обязанный своим существованием этой силе, может быть выражен через $P(dp' + dp'')$. Но ясно, что $dp' + dp''$ представляет собой полный дифференциал p, который мы обозначим dp, так как расстояние p может изменяться только вследствие смещения обоих этих тел. Таким образом, рассматриваемый момент сил равен Pdp. Этот вывод можно распространить на любое количество тел[2].

5. Отсюда следует, что для получения суммы моментов всех сил заданной системы, будь то силы внешние или внутренние, следует рассмотреть в отдельности каждую из сил, действующих на различные тела или точки системы, и взять сумму произведений этих различных сил, умноженных каждая на дифференциал соответствующего расстояния между обеими точками каждой силы, а именно: между точкой, на которую эта сила действует, и точкой, к которой она стремится. В этих дифференциалах следует рассматривать в качестве переменных все величины, зависящие от положения системы, и в качестве постоянных — величины, относящиеся к внешним точкам или центрам, т. е. эти последние точки следует рассматривать как постоянные, когда положение системы подвергается изменению.

Указанная сумма, будучи приравнена нулю, даст общую формулу статики.

ЧАСТЬ II

Динамика

Раздел II

Общая формула динамики для движения системы тел, находящихся под действием каких-либо сил

1. Когда силы, действующие на систему тел, распределены соответственно законам, изложенным в первой части настоящего сочинения, то эти силы взаимно уничтожаются и система остается в равновесии. Но если равновесия не существует, то тела должны двигаться, подчиняясь полностью или частично влиянию действующих сил. Определение движений, вызываемых заданными силами, и составляет предмет настоящей второй части «Аналитической механики».

Мы будем рассматривать главным образом силы ускоряющие и замедляющие, действие которых, подобно действию силы тяжести, непрерывно и которые стремятся каждое мгновение сообщить бесконечно малую и одинаковую для всех частиц материи скорость.

В том случае, когда эти силы действуют свободно и равномерно, они вызывают скорости, которые возрастают пропорционально времени. Сообщенные таким образом за заданное время скорости можно рассматривать как наиболее простое действие этого рода сил, которое, следовательно, является наиболее подходящим для измерения. Простые действия этих сил следует в механике считать известными, и все искусство этой науки заключается лишь в том, чтобы вывести из них сложные явления, которые должны получаться в результате соединенного и видоизмененного действия этих сил.

2. Итак, допустим, что для каждой ускоряющей силы известна скорость, какую она способна сообщить в течение определенного промежутка времени, который мы примем в качестве единицы времени, движущемуся телу, действуя на него все время одинаковым образом, и будем измерять ускоряющую силу именно с помощью этой скорости. Последняя же, в свою очередь, должна измеряться тем пространством, которое движущееся тело прошло бы в течение такого же времени, если бы оно продолжало двигаться равномерно. На основании теорем Галилея известно, что это пространство всегда вдвое больше пространства, фактически проходимого телом под постоянным действием ускоряющей силы.

Вообще можно какую-нибудь известную ускоряющую силу принять в качестве единицы и к ней относить все прочие силы. Тогда в качестве единицы пространства следует принять удвоенную величину того пространства, которое под влиянием той же равномерно действующей силы пройдет тело в течение промежутка времени, принятого в качестве единицы времени, а скорость, полученная за то же время под постоянным действием той же силы, будет в этом случае единицей скоростей.

Таким образом, силы, пространства, времена и скорости явятся лишь простыми отношениями, обыкновенными математическими количествами[3].

Так, например, если в качестве единицы ускоряющих сил приHять силу тяжести на широте Парижа и время измерять в секундах, тогда следует 30,196 парижских фута принять в качестве единицы пройденных пространств, так как 15,098 — это высота, с какой на этой широте падает в одну секунду тело, предоставленное самому себе. В этом случае единицей скоростей будет та скорость, которую падающее тело приобретает, пройдя указанную высоту.

3. Установив эти предварительные определения, рассмотрим систему тел, расположенных совершенно произвольным образом и находящихся под действием любых ускоряющих сил.

Пусть m — масса любого их этих тел, которое мы будем рассматривать в качестве точки. Для простоты отнесем абсолютное положение этого тела к концу любого промежутка времени t к трем прямоугольным координатам: x, y, z. Эти координаты мы будем предполагать всегда параллельными трем осям, неподвижным в пространстве и пересекающимся под прямыми углами в одной точке, называемой *началом координат*. Следовательно, эти координаты выразят расстояния тела от трех плоскостей, проходящих через эти же оси.

Вследствие взаимной перпендикулярности указанных плоскостей координаты x, y, z выражают те расстояния, на которые тело при своем движении отдаляется от этих плоскостей. Значит,

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

выразят те скорости, которые рассматриваемое тело имеет в некоторое мгновение, чтобы удалиться от каждой из этих плоскостей и двигаться в сторону возрастающих координат. Если бы тело затем было предоставлено самому себе, то, согласно основным принципам теории движения, эти скорости остались бы в последующие мгновения постоянными.

Однако вследствие существования между телами связи и под действием влияющих на них ускоряющих сил эти скорости в течение мгновения dt получают приращения

$$d\frac{dx}{dt}, d\frac{dy}{dt}, d\frac{dz}{dt},$$

которые надлежит определить. Эти приращения можно рассматривать как новые скорости, сообщенные каждому телу, и если их разделить на $\mathrm{d}t$, то мы будем иметь меру ускоряющих сил, необходимых для того, чтобы вызвать эти приращения. В самом деле, как бы ни было изменчиво действие какой-либо силы, согласно природе дифференциального исчисления, мы можем ее всегда принять в качестве постоянной в течение бесконечно малого времени. Тогда скорость, сообщенная телу этой силой, пропорциональна произведению силы на время. Следовательно, сама сила будет выражена с помощью отношения скорости ко времени.

Если элемент времени $\mathrm{d}t$ принять в качестве постоянной величины, то рассматриваемые ускоряющие силы выразятся через $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$, $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$, а если эти силы умножить на массу m тела, на которое они действуют, то

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

выразят силы, примененные непосредственно для того, чтобы в течение времени $\mathrm{d}t$ двигать тело m параллельно осям координат x, y, z. Таким образом, каждое тело m системы можно рассматривать как находящееся под действием подобных сил. Следовательно, все эти силы должны быть эквивалентны тем силам, под влиянием которых, согласно допущению, находится система и действие которых видоизменяется вследствие природы самой системы. Поэтому, согласно теореме, приведенной в первой части (разд. II, п. 15), сумма моментов первых всегда должна быть равна сумме моментов вторых.

4. В дальнейшем мы будем применять обычный знак d для обозначения дифференциалов по времени, а вариации, выражающие виртуальные скорости, мы будем обозначать знаком δ, как мы это уже делали и раньше при разрешении некоторых вопросов в первой части настоящего сочинения.

Тогда мы будем иметь $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\delta x$, $m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\delta y$, $m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\delta z$ для моментов сил $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, $m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$, $m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$, действующих по направлению координат x, y, z и стремящихся увеличить эти координаты. Сумма моментов может быть, таким образом, выражена с помощью формулы

$$Sm\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\delta x+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\delta y+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\ \delta z\right),$$

если допустить, что знак интегрирования S распространяется на все тела системы.

5. Пусть теперь P, Q, R, ... представляют собою заданные ускоряющие силы, воздействующие на каждое тело системы по

направлению соответствующих центров, к которым, согласно допущению, направлены эти силы, и пусть p, q, r, ... — прямолинейные расстояния каждого из этих тел от тех же центров. Тогда дифференциалы δp, δq, δr, ... — вариации линий p, q, r, ..., происходящие вследствие вариаций δx, δy, δz координат x, y, z тела m. Но так как силы P, Q, R, ..., согласно нашему представлению, стремятся уменьшить эти линии, то их виртуальные скорости должны быть выражены через $-\delta p$, $-\delta q$, $-\delta r$, ... (ч. I, разд. II, п. 3). Следовательно, моменты сил mP, mQ, mR, ... равны $-mP\delta p$, $-mQ\delta q$, $-mR\delta r$, ..., а сумма моментов всех этих сил составит

$$-Sm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ...).$$

Если эту сумму приравнять к сумме, приведенной в предыдущем пункте, то мы получим

$$Sm\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = -Sm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ...)$$

или, перенеся правую часть влево,

$$Sm\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) + Sm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + ...) = 0.$$

Такова общая формула динамики для движения любой системы тел. ⟨...⟩

Комментарий

Перевод с французского работы Ж. Л. Лагранжа выполнен В. С. Гохманом. Отрывки из работы воспроизводятся по изданию: Лагранж Ж. Аналитическая механика. В 2 т. 2-е изд. М. — Л., 1950.

1 Здесь, как и раньше, слово «тело» обозначает материальную точку.

2 Особенность изложения Лагранжа состоит в том, что он, введя деление сил на внешние и внутренние, при определении работы внутренних сил всегда в качестве элемента рассматривает сумму работ действия и противодействия, особо отмечая взаимное перемещение взаимодействующих точек.

3 Пояснение, которое делает здесь Лагранж, связано с тем, что в XVIII в. еще не стало традицией рассмотрение физических величин, имеющих составную размерность.

Литература

[1] Собрание сочинений Ж. Л. Лагранжа:
Lagrange J. L. Oeuvres. T. 1—14. Paris, 1867—1892.
[2] Forti A. Intorno alla vita e alle opera di Luiji Lagrange. Roma, 1869.
[3] Погребысский И. Б. От Лагранжа к Эйнштейну. М., 1966.
[4] Жозеф Луи Лагранж (1736—1936). Сб. ст., М. — Л., 1937.
[5] Тюлина И. А. Жозеф Луи Лагранж. М., 1977.

Голин Г. М., Филонович С. Р.
Классики физической науки (с древнейших времен до начала XX в.): Справ. пособие. — М.: Высш. шк., 1989. — 576 с.: ил. ISBN 5-06-000058-3