Д. Бернулли

1700—1782

О течении жидкостей

Механнка жидкостей представляет собой один нз нанболее тесно связанных с практикой разделов механики. Вопросы гидростатики интересовали еще ученых античности, а гидравлика как часть инженерии стала развиваться задолго до того, как было дано объяснение основным закономерностям, характеризующим движение и равновесие жидкостей. В XVII в. интерес к проблемам механики жидкости обострился в связи с ростом масштабов ирригационных работ и использования энергии движущейся воды.

В XVII в. задачами гидравлики занимались С. Стевин и Г. Галилей, Э. Торричелли и Б. Паскаль, Э. Мариотт и И. Ньютон. Однако в это время было создано лишь учение о равновесии жидкостей. Эффекты, возникающие в движущейся жидкости, и описывающие их законы были установлены в основном в XVIII столетии. Ученым, заложившим основы гидродинамики и давшим имя этому разделу механики, был швейцарский ученый Д. Бернулли.

Даниил Бернулли родился 8 февраля 1700 г. в Гронингене (Нидерланды). Он был средним из трех сыновей Иоганна Бернулли I, принадлежавшего к семейству, из которого вышло немало выдающихся ученых (сам И. Бернулли занимал в Гронингене кафедру математики). Вскоре семья И. Бернулли переезжает в Базель, где Даниил сначала заканчивает гимназию, а затем изучает философию и логику в местном университете. В 16 лет он уже получил степень магистра философии. В это же время Даниил под руководством старшего брата Николая учился математике. Однако на этом образование талантливого юноши не закончилось — в 1718—1720 гг. он изучает медицину в Базеле, Гейдельберге и Страсбурге. В 1721 г. он получает степень лиценциата медицины. Когда попытки Бернулли занять кафедру анатомии или ботаники в Базеле кончаются неудачей, он едет в Италию для продолжения медицинского образования. Там же, в Венеции, он публикует первую серьезную научную работу — книгу «Математические упражнения». Эта книга получила известность, и именно благодаря ей Даниила вместе с братом Николаем пригласили во вновь созданную Петербургскую Академию наук.

В Петербурге Д. Бернулли стал профессором физиологии, но его научная деятельность в период работы в России (1725—1733) выходила далеко за рамки этой дисциплины. Так, он много занимался проблемами механики (ему принадлежат разработка метода сложения и разложения скоростей, анализ проблемы сохранения «живых сил» и др.). Однако особенно много во время работы в Петербургской Академии Бернулли занимался проблемами гидродинамики. Им было написано несколько работ, составивших основу будущей книги «Гидродинамика», а также подготовлен ее план.

В 1733 г. после безвременной кончины брата Николая Даниил Бернулли вернулся в Базель. Сначала он получил кафедру анатомии и ботаники, затем физиологии и, наконец, физики. Преподавать в университете Бернулли продолжал до 1776 г. Его лекции по физике сопровождались интересными демонстрациями и привлекали многочисленных слушателей. Уже переехав в Базель, Бернулли издал свое основное произведение «Гидродинамика, или записки о силах и движениях жидкостей» (1738).

В базельский период жизни ученый занимался и многими другими проблемами механики и математики. Бернулли принадлежат важные исследования колебаний струн и воздуха, при анализе которых он применил тригонометрические ряды, впоследствии названные рядами Фурье. Значителен вклад Бернулли в теорию бесконечных рядов, изучение которых он начал еще в Петербурге. Большую известность получили работы Бернулли по теории вероятности, к которой он впервые применил исчисление бесконечно малых. О значимости исследований Бернулли свидетельствует тот факт, что они 10 раз удостаивались премий Парижской Академии наук за победы в конкурсах по наиболее актуальным проблемам науки. Кроме Петербургской АН Бернулли был членом Берлинской, Парижской, Болонской академий, а также Лондонского Королевского общества. Ученый умер 17 марта 1782 г.

Обладая талантом блестящего теоретика, Бернулли на протяжении всей жизни стремился решать практически важные задачи. Интерес к гидродинамике проявился уже в первой книге Бернулли — «Математических упражнениях». Однако в ту пору он еще не вышел за рамки традиционного подхода, при котором не проводилось четкого различия между задачами гидростатики и гидродинамики. Идеи метода рассмотрения проблем гидродинамики возникли у Бернулли в первые годы его деятельности в Петербурге. Правда, при представлении сообщений по этому вопросу в Академии Бернулли столкнулся с резкой критикой со стороны академиков Я. Германа и Г.-Б. Бюльфингера. Однако победителем в споре вышел все же Бернулли, хотя возможно, что дискуссия с Германом и Бюльфингером способствовала уточнению его позиций.

Гидродинамика Бернулли основывается на применении представления о «бесконечно малых частицах жидкости» (т. е. физически бесконечно малых величинах) и методов математического анализа к решению физических задач. Рассмотрение Бернулли базируется не на непосредственном интегрировании уравнений движения жидкости (они еще не были известны), а на соображениях, которые на современном языке называются энергетическими. Так, он широко применяет принцип живых сил и понятие, сходное с современным понятием «потенциальная энергия». Кроме того, одним из важных инструментов при решении задач является у Бернулли соотношение, отражающее неразрывность струи.

Книга Бернулли удивительно богата по содержанию. В ней кроме обсуждения многочисленных задач гидростатики и гидродинамики можно найти основы кинетической теории газов, дальнейшее развитие которой относится уже к XIX в. Следует иметь в виду, что вначале чтение «Гидродинамики» может вызвать некоторые затруднения, поскольку Бернулли пользуется непривычными для современного читателя обозначениями и системой единиц, фактически обращаясь с физическими величинами как с числами, не имеющими размерности. Тем не менее физическая суть подхода к решению задач излагается Бернулли очень ясно, и это оправдывает те усилия, которых требует чтение его книги.

Гидродинамика

Часть двенадцатая, которая излагает статику движущихся жидкостей, названную мною гидравлико-статикой

§ 1. Среди тех, кто предложил меры давления жидкостей, находящихся внутри сосудов, не многие переступили через обычные правила гидростатики, которые мы доказали во второй части. Однако имеется много другого, что относится к собственно так называемой гидростатике, например, когда к действию тяжести присоединяется центробежная сила или сила инерции, что мы рассмотрели в предыдущей части, а подобного рода мертвые силы можно придумать и сочетать на бесчисленное множество ладов. Но это не является тем, что мне представляется наиболее желательным, ибо для этого дела нетрудно дать общие правила. Мне представляется более существенной статика жидкостей, движущихся поступательно внутри сосудов, например вод, текущих по трубам к фонтанам; ведь она имеет многообразное применение, но никем не была исследована. Если кое-кто и упоминает о ней, то дает совершенно неправильное ее толкование, ибо те, которые говорили о давлении вод, протекающих через водопроводы, и о крепости последних, необходимой для того, чтобы выдержать это давление, преподали совершенно те же законы, что и для жидкостей, не уносимых каким-либо движением.

§ 2. В этой гидравлико-статике особенным является то, что нельзя определить давления вод раньше, чем будет правильно выяснено движение. Последнее и послужило причиной того, что это учение так долго оставалось неизвестным, ибо до сих пор авторы очень мало интересовались исследованием движения вод, а скорости они почти повсюду определяли лишь на основании высоты воды. Но хотя часто движение столь быстро приближается к этой скорости, что ускорения совершенно не могут быть восприняты чувствами, и кажется, будто все движение возникает мгновенно, тем не менее представляется интересным правильно изучить эти ускорения, ибо иначе зачастую бывает невозможно определить давления текущих вод. Поэтому я решил, что представляется очень важным исследовать со всей тщательностью эти изменения с самого начала движения и до заданного момента, хотя бы они были мгновенными, и подкрепить это опытами, что я и сделал в различных местах настоящего трактата и в особенности в третьей части. ⟨...⟩

§ 4. ⟨...⟩ Этот вопрос должен быть рассмотрен с помощью особого метода, когда воды текут по трубам, и это-то учение я главным образом подразумеваю под названием гидравлико-статики. В данном случае может быть определено не столько давление на основании скорости, сколько, если сделано малое отверстие в стенках трубы, наоборот, скорость на основании давления. Этой именно *гидравлико-статикой*, применение которой является весьма обширным, я и решил преимущественно заняться в настоящей части.

Задача

§ 5. Пусть имеется весьма обширный сосуд $ACEB$ [рис. 58], который должен постоянно поддерживаться полным воды и снабжен цилиндрической горизонтальной трубой ED, и пусть в конце трубы имеется отверстие o, выбрасывающее воду с равномерной скоростью. Требуется определить давление воды на стенки трубы ED.

Решение. Пусть высота поверхности воды AB над отверстием о равна a. Тогда скорость воды, вытекающей в о, если исключить первые моменты вытекания, следует признать равномерной и равной $\sqrt{a}$, так как мы принимаем, что сосуд поддерживается постоянно полным. А если допустить, что отношение сечения трубы и ее отверстия равно $\frac{n}{1}$, то скорость воды в трубе будет равна $\frac{\sqrt{a}}{n}$. Но если бы дно FD полностью отсутствовало, то предельная скорость воды в этой же трубе была бы равна $\sqrt{a}$, что больше, чем $\frac{\sqrt{a}}{n}$. Таким образом, вода в трубе стремится к большему движению, но ее упор встречает сопротивление со стороны дна FD. Этот упор и противодействие ему сжимает воду, каковое сжатие выдерживается стенками трубы, и,

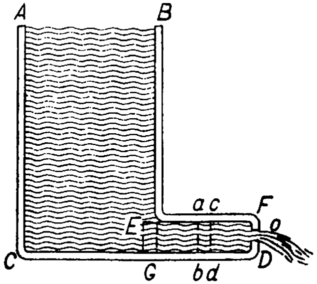

Рис. 58

стало быть, последние испытывают на себе подобное же давление. Таким образом, ясно, что давление стенок пропорционально ускорению или приращению скорости, которую приобрела бы вода, если бы мгновенно исчезла всякая помеха для движения, так что она выбрасывалась бы прямо в воздух.

Итак, теперь дело свелось к тому, чтобы, отрезав трубу ED в cd в какой-либо момент времени при продолжающемся протекании воды через o, определить, какое ускорение может вследствие этого получить капелька $abdc$. Такое именно давление будет испытывать со стороны протекающей воды частица ac, взятая на стенках трубы. Для этой цели надлежит рассмотреть сосуд $ABEcdC$ и для него найти ускорение весьма близкой к вытеканию частицы воды, если она будет иметь скорость $\frac{\sqrt{a}}{n}$. Это мы и сделали в очень общем виде в § 3 части пятой. Но так как в настоящем частном случае вычисление является очень коротким, то мы здесь заново произведем вычисление движения в укороченном сосуде $ABEcdC$.

Рассматриваем скорость как переменную. Пусть скорость воды в трубе Ed равна v; сечение трубы, как и раньше, равно n, длина Ec равна c. Обозначим длину бесконечно малой и весьма близкой к вытеканию водной частицы ac через dx. В E будет находиться равная капелька, которая будет готова вступить в трубу в тот самый момент времени, когда другая капелька $acdb$ выбрасывается. Но в то время как капелька, в E, масса которой равна ndx, вступает в трубу, она приобретает скорость v, а также *живую силу* nv^2dx[1], каковая *живая сила* полностью возникла вновь, ибо вследствие бесконечно большого размера сосуда AE капелька E, не вступившая еще в трубу, не обладала никаким движением. К указанной *живой силе* nv^2dx следует прибавить приращение ж и в о й с и л ы, получаемое водой в Eb, пока капелька ad вытекает, а именно $2ncvdv$. Эта сумма соответствует *действительному снижению* капельки ndx с высоты BE, т. е. a. Таким образом, мы имеем

$$nv^2dx + 2ncvdv = nadx,$$

или

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{a - v^2}{2c}.$$

Но при всяком движении приращение скорости dv пропорционально давлению, умноженному на малое время, которое в данном случае равно $\frac{dx}{v}$. Таким образом, в нашем случае давление, испытываемое капелькой ad, пропорционально $\frac{vdv}{dx}$, т. е. величине $\frac{a-v^2}{2c}$.[2]

А в тот момент времени, когда труба разрезается, $v=\frac{\sqrt{a}}{n}$, или $v^2=\frac{a}{n^2}$; стало быть, это значение надлежит поставить в выражение $\frac{a-v^2}{2c}$, которое, таким образом, превращается в следующее выражение: $\frac{n^2-1}{2n^2c}a$. Последнее же представляет собой величину, которой пропорционально давление воды на частицу трубы ac, каким бы сечением ни обладала труба и каким бы отверстием ни было просверлено ее дно. Итак, если давление воды будет установлено в одном случае, то вместе с тем оно станет известно и во всех остальных случаях. Этот случай мы имеем именно тогда, когда отверстие бесконечно мало или когда n бесконечно велико по сравнению с единицей[3]; ведь само по себе ясно, что в этом случае вода применяет все свое давление, которое соответствует высоте a, каковое давление мы обозначим через a. Но когда n бесконечно велико, то единица по сравнению с числом n^2 исчезает, а величина, которой пропорционально давление, оказывается равной $\frac{a}{2c}$. Таким образом, если мы желаем вообще узнать, каким будет давление, когда n является каким угодно числом, то следует установить такую аналогию. Если величине $\frac{a}{2c}$ соответствует давление a, то каким будет давление для величины $\frac{n^2-1}{2n^2c}a$? Этим путем устанавливается, что искомое давление равно $\frac{n^2-1}{n^2}a$, что и требовалось определить. ⟨...⟩

Следствие 2

§ 7. Если где-нибудь в трубе просверлить очень малое отверстие, т. е. очень малое по сравнению с отверстием o, то вода будет выливаться с такой скоростью, с какой она могла бы подняться на высоту $\frac{n^2a-a}{n^2}$, если только посторонние помехи не создают никакого препятствия. А именно высота подъема на рис. 59, т. е. ln, будет равна $\frac{n^2a-a}{n^2}$. А если имеется вертикальная или хотя бы как угодно наклоненная трубочка gm, сообщающаяся с горизонтальной трубой, но, однако, чтобы край вставленной трубочки не выдавался внутри полости горизонтальной трубки, дабы протекающая вода не наскакивала на этот край, то вертикальная высота воды во вставленной трубке будет точно

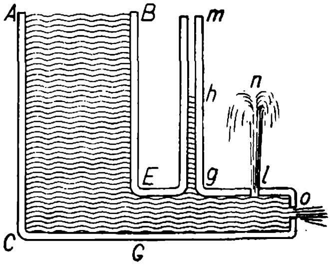

Рис. 59

так же равна $\frac{n^2a-a}{n^2}$; в этом последнем случае нет надобности в том, чтобы трубочка была очень узкой[4]. ⟨...⟩

Задача

§ 10. Определить давление воды, протекающей с любой равномерной скоростью[5] по трубе, имеющей какую угодно форму и наклон.

Решение. Пусть имеется труба ACD [рис. 60], через отверстие o которой протекают, допустим, воды с постоянной скоростью и притом с такой, которая соответствует вертикальной высоте oS. Проведем прямую SN и представим себе бесконечно широкий сосуд $NMQP$, наполненный водой до NP, из которого труба постоянно и равномерно засасывает свои воды. Я выбрал такие условия, чтобы имелась налицо однообразная причина или побуждающая сила, которая гонит вперед воды с заданной скоростью, т. е. поддерживает одинаковое течение вод. Без этого допущения наша задача была бы неопределенной, ибо в одной и той же трубке к какому-либо моменту времени одна и та же скорость может быть создана на бесчисленное множество ладов; поэтому для того, чтобы можно было измерить причину, толкающую вперед воду, следует представить себе однообразие в движении вод.

Пусть теперь требуется определить давление в CF (или в cf). Для этой цели мы снова предположим, что труба разрезана в CE (или в ce) с тем, чтобы определить в перпендикулярном трубе сечении, какое ускорение или замедление получит капля $CEGF$ (или $cegf$) после первого момента разрыва. Поэтому нам следует определить вообще мгновенное движение через укороченный сосуд $NMAECQP$ (или $NMAceQP$). Следовательно, пусть скорость бесконечно малой капельки $CEGF$ (или $cegf$) в самой точке укорочения равна v, ее масса dx. Тогда живая сила воды, движущейся в укороченном сосуде, будет пропорциональна количеству v^2; поэтому мы положим ее равной αv^2, понимая под буквой α какую-нибудь постоянную величину, которая зависит от размеров разорванной трубы; однако точного определения ее здесь не требуется. Заметим, что живая сила воды в воображаемом сосуде $NMQP$ не принимается в расчет в силу его бесконечно большого размера; однако если бы он даже не обладал бесконечно большим размером, то от этого все-таки не получилось бы никакого изменения в вычислении. Итак, мы видим, что приращение живой силы воды, движущейся в укороченном сосуде, равно $2\alpha v dv$. Если к последнему прибавить живую силу, одновременно порожденную в выброшенной капельке, то получается $2\alpha v dv + v^2 dx$, что представляет собой полное приращение живой силы, соответствующее действительному снижению капельки dx на высоту точки C (или c), каковую мы обозначим через a. Поэтому указанное выше полное приращение живой силы надлежит приравнять к adx, так что получится

$$2\alpha v dv + v^2 dx = a dx,$$

или

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{a - v^2}{2\alpha}.$$

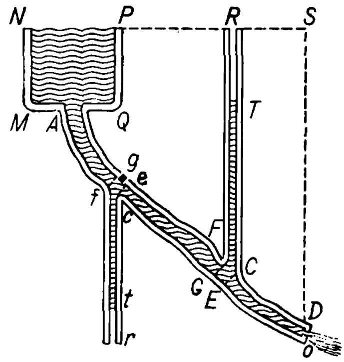

Рис. 60

Если остальное сделать так, как в § 5, и если допустить, что скорость v является такой, какая соответствует высоте b, то окажется, что давление воды в CF (или в cf) столь же велико, как в воде, стоящей на высоте $a - b$. При этом можно отметить, что если не имеется никаких посторонних помех для движения и если вытекающая из o струя не подвергается сжатию, то высота b находится к высоте oS в двойном отношении отверстия к сечению CE (или ce)[6].

Следствие

§ 11. Когда b больше a, то величина $a - b$ оказывается отрицательной и, таким образом, давление превращается во всасывание, т. е. стенки трубы испытывают давление внутрь. А тогда следует рассматривать это дело таким образом, как если бы вместо столбца воды CT, который располагается наверху и находится в равновесии с текущей водой, существовал подвешенный водяной столб ct; стремлению которого упасть противодействовало бы притяжение текущей воды. Так, например, если сечение ce трубы равно отверстию o, тогда $b = oS$, если совершенно не принимать во внимание случайных помех для движения. Отсюда, если из трубы вниз будет идти трубочка cr, а последняя будет заполнена водой от своего начала и до точки t, расположенной на одном уровне с отверстием о, то вода ct будет оставаться подвешенной без движения. Но если точка t будет расположена ниже o, то вода будет спускаться по трубочке cr и постоянно вытекать в r, однако скорость воды, вытекающей в r, вопреки тому, что мог бы легко подумать всякий, незнакомый еще с настоящей теорией, не будет такой, какая соответствует высоте NP над r, хотя бы и были устранены все помехи, а скорее эта скорость будет соответствовать, если только трубочка очень узка по сравнению с трубой, высоте tr. Если точка t будет расположена выше точки o, то вода сама собой поднимется, а после того как вся она войдет в трубу, через трубочку будет втягиваться воздух и в скором времени водяная струя, вытекающая в o, помутнеет вследствие примешавшегося воздуха и потеряет свою прозрачность и плотность. Таким образом, ясно, в каких случаях давление будет положительным и в каких — отрицательным, а именно: давление в трубе бывает тем большим, чем она шире и чем ниже она расположена. Действительно, в теории высота $b=\frac{1}{n^2}\cdot oS$, если $\frac{1}{n}$ обозначает отношение между сечением отверстия и тем сечением трубы, для которого необходимо определить давление. Но если помехи значительно уменьшают движение, то при определении давлений представляется более подходящим установить на опыте, какова в действительности скорость воды, и вместо b подставить высоту, соответствующую этой скорости. Равным образом давление будет определено более точно, если вместо a подставить не высоту водной поверхности NP над местом вытекания, а высоту той скорости, с которой воды в действительности вытекают из той же трубы в месте разреза. Однако эти поправки не всегда имеют место. ⟨...⟩

Комментарий

Перевод с латинского «Гидродинамики» выполнен В. С. Гохманом.

Отрывки воспроизводятся по изданию: *Бернулли Д.* Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкостей. Л., 1959.

Первое издание: *Bernoulli D.* Hydrodynamica, sive de viribus et notibus fluidorum commentarii. Argentorati, 1738.

1 Напомним, что «живой силой» называлась величина, равная произведению массы тела на квадрат его скорости mv^2 (т. е. удвоенная кинетическая энергия тела).

2 С помощью этой формулы Бернулли впервые в истории науки о движении жидкости установил разницу между гидростатическим и гидродинамическим давлениями.

3 Здесь Бернулли использует прием, называемый в наши дни принципом соответствия: он определяет коэффициент в формуле, переходя в пределе от динамической задачи к статической.

4 Здесь Бернулли формулирует принцип действия манометра для измерения давления движущейся жидкости.

5 Как видно из решения задачи, здесь речь идет не о «равномерности» (т. е. постоянстве) скорости в трубе в целом, а лишь о независимости скорости течения жидкости в каждом сечении трубы от времени, т. е. Бернулли рассматривает установившееся течение.

6 Таким образом Бернулли получает знаменитый закон, описывающий течение идеальной жидкости. Действительно, из сравнения этой задачи с результатами § 5 ясно, что искомое давление пропор-

ционально отношению $(a^2 - v^2)/(2\alpha)$. Учитывая, что $a = H - z$, где H — высота уровня NP над отверстием о, а z — его же высота над сечением EC, и что $v = \sqrt{H/n}$, где n — площадь сечения EC (площадь сечения отверстия о, как и раньше, принимается за единицу), получаем $p \sim \dfrac{H-z-H/n^2}{2\alpha}$. Повторяя рассуждения, подобные приведенным в § 5, получаем, что при $v \to 0$ давление равно $(H - z)/(2\alpha) = A$ или равно высоте столба воды A. Тогда выражение для давления переписывается в виде $p \sim A - \dfrac{HA}{n^2(H-z)}$. Переходя к обозначениям $A = H - z$ (см. § 5) и не выписывая несущественные константы, получаем выражение для закона Бернулли, близкое к современному: $P + z + v^2 = H = \text{const}$.

Необходимость непривычных для современного читателя преобразований (с кажущимся нарушением размерности) связана с системой единиц, применяемой Бернулли.

Литература

[1] В настоящее время в Швейцарии издается собрание сочинений Д. Бернулли: Die Werke von Daniel Bernoulli. Basel.

[2] Григорьян А. Т., Ковалев Б. Д. Даниил Бернулли. М., 1981.

[3] Rouse H., Ince S. History of Hydraulics. Iowa, 1957.

[4] Никифоровский В. А. Великие математики Бернулли. М., 1984.

Голин Г. М., Филонович С. Р.
Классики физической науки (с древнейших времен до начала XX в.): Справ. пособие. — М.: Высш. шк., 1989. — 576 с.: ил. ISBN 5-06-000058-3