Архимед

ок. 287 — 212 до н. э.

О статике и гидростатике

Для эпохи эллинизма, начало которой было положено завоеваниями Александра Македонского, характерен постепенный переход от общих натурфилософских построений к более конкретным исследованиям в отдельных областях естествознания. Этому во многом способствовало значительное расширение круга практических знаний и опыта, вызванное образованием громадной империи Александра. Философские рассуждения, догадки, а часто и домыслы в трудах греческих ученых постепенно уступали место доказательным методам математики. Широкое развитие военной и строительной техники делало мышление ученых более прагматичным. Отмеченные особенности науки эллинистической эпохи были присущи творчеству Архимеда, одного из основателей статики и гидростатики.

О жизни Архимеда известно не много, но его имя и творчество овеяны многочисленными легендами.

Архимед родился в Сиракузах на острове Сицилия в 287 г. до н. э. Его отец, астроном Фидий, был родственником сиракузского царя Гиерона. Архимед получил хорошее образование, долгие годы пробыв в знаменитом Александрийском музее — уникальном научно-исследовательском центре античного мира, с которым ученый не порывал связей до конца своей жизни (он погиб в 212 г. до н. э.). Легендой овеяны последние минуты жизни ученого. Ворвавшийся в дом Архимеда римский воин убил склоненного над какими-то вычислениями старика, который просил немного подождать, пока он не закончит решение задачи.

Творческую деятельность Архимед начал как инженер, создавая различные механические приспособления, широко использовавшиеся в строительной технике и быту. Всего Архимеду приписывают около 40 изобретений, в том числе такие, как винт и полиспаст. К этому периоду относится одно из первых его сочинений «Книга опор», не дошедшая до нас, цитаты из которой приводит в своей «Механике» александрийский инженер и математик Герон. В сочинении давался расчет (правда, ошибочный) многоопорной балки и приводилась теория двуплечего рычага.

В трудах по геометрии Архимед разрабатывал интегральные методы, широко использовавшиеся математиками вплоть до создания Г. В. Лейбницем и И. Ньютоном интегрального исчисления. Архимед предложил приемы вычисления поверхностей и объемов сложных фигур, которые основывались на рассмотрении более простых (кругов, цилиндров, шаров).

Большую известность получил трактат Архимеда «Псаммит» («Исчисление песчинок») астрономо-вычислительного характера. Архимед определяет число песчинок во Вселенной, полагая ее замкнутой и ограниченной сферой. Здесь же он дает размеры (разумеется, неточные) Земли, Солнца и расстояние между ними.

Подход Архимеда к физическим проблемам основан на простых, но строгих геометрических доказательствах, так что его можно считать родоначальником математической физики, которой он посвящает трактаты «О равновесии плоских фигур», «О плавающих телах» и не дошедшую до нас фундаментальную работу по оптике «Катоптрика».

Трактат «О равновесии плоских фигур» состоит из двух книг. В первой Архимед обобщает эмпирические данные, полученные его предшественниками о равновесии твердых тел, формулируя на их основе аксиомы-постулаты, и выводит закон рычага. С помощью строгих геометрических доказательств он получает ряд следствий, строя, таким образом, теорию о центре тяжести; пользуясь доказанными теоремами, Архимед находит положение центра тяжести различных плоских фигур, ограниченных прямыми: параллелограмма, треугольника и трапеции. Вторая книга посвящена определению центров тяжести параболического сегмента и параболической трапеции.

Сочинение «О плавающих телах» исследователи относят к числу самых поздних, а некоторые считают его последним научным трудом Архимеда. Это сочинение также состоит из двух книг. В первой книге Архимед, полагая свободную поверхность жидкости сферической, подробно разбирает вопросы, связанные с погружением твердых тел в жидкость, и формулирует закон, до сих пор приводимый в любом школьном учебнике. И здесь подход к проблеме тот же: на основании опытных наблюдений Архимед строит модель жидкости, с помощью которой получает ряд следствий, обосновывая их строгими геометрическими доказательствами. Во второй книге, полагая поверхность жидкости плоской, он рассматривает принцип работы ареометра и условие равновесия в жидкости тел, имеющих форму сегмента параболоида. Выводы Архимеда представляли практический интерес для судостроения.

О равновесии плоских фигур, или о центрах тяжести плоских фигур

КНИГА 1

Сделаем следующие допущения:

1. *Равные тяжести на равных длинах уравновешиваются, на неравных же длинах не уравновешиваются, но перевешивают тяжести на большей длине.*

2. *Если при равновесии тяжестей на каких-нибудь длинах к одной из тяжестей будет что-нибудь прибавлено, то они не будут уравновешиваться, но перевесит та тяжесть, к которой было прибавлено.*

3. *Точно так же, если от одной тяжести будет отнято что-нибудь, то они не будут уравновешиваться, но перевесит та тяжесть, от которой не было отнято.*

4. *При совмещении друг с другом равных и подобных*[1] *плоских фигур совместятся друг с другом и их центры тяжести.*

5. *У неравных же, но подобных фигур центры тяжести будут подобно же расположены.* Под подобным расположением точек в подобных фигурах мы подразумеваем такое, в котором прямые, проведенные из этих точек к вершинам равных углов, образуют равные углы с соответствующими сторонами.

6. *Если величины уравновешиваются на каких-нибудь длинах, то на тех же самых длинах будут уравновешиваться и равные им.*

7. *Во всякой фигуре, периметр которой везде выпукл в одну и ту же сторону, центр тяжести должен находиться внутри фигуры.*

При этих предположениях:

I. *Тяжести, уравновешивающиеся на равных длинах, будут тоже равны.* Действительно, если бы они были неравными, то после отнятия от большей избытка они не уравновесятся, поскольку что-то отнято от одной из двух уравновешивающих тяжестей. Таким образом, уравновешивающиеся на равных длинах тяжести будут тоже равны.

II. *Неравные тяжести на равных длинах не уравновешиваются, но перевешивает бóльшая.* ⟨...⟩

III. *Неравные тяжести будут уравновешиваться на неравных длинах, причем бóльшая тяжесть на меньшей длине.*

Пусть А, В — неравные тяжести и А — бóльшая, причем они уравновешиваются на длинах АГ, ГВ [рис. 1]. Требуется доказать, что АГ меньше ГВ.

Действительно, пусть она не будет меньше. Тогда после отнятия избытка, на который А превышает В, перевесит В, поскольку что-то было отнято от одной из уравновешивающихся тяжестей. Но она не перевесит; действительно, если ГА равна ГВ, то они уравновесятся [как равные тяжести на равных длинах], если же ГА больше ГВ , то перевесит А, так как равные тяжести на не-

Рис. 1

равных длинах не уравновешиваются, но перевешивает тяжесть на большей длине. На основании этого АГ меньше ГВ.

Так же ясно, что уравновешивающиеся на неравных длинах тяжести не равны, причем бо́льшая тяжесть будет на меньшей длине.

IV. *Если две равные величины не имеют одного и того же центра тяжести, то для величины, составленной из обеих этих величин, центром тяжести будет середина прямой, соединяющей центры тяжести этих величин.* ⟨...⟩

V. *Если центры тяжести трех величин лежат на одной прямой, причем эти величины имеют одинаковую тяжесть, и прямые, лежащие между центрами, равны, то для величины, составленной из всех величин, центром тяжести будет точка, которая является центром тяжести для средней* [величины]. ⟨...⟩

Следствие 1

Из этого ясно, что если имеется любое нечетное количество величин, центры тяжести которых лежат на одной прямой, причем величины, одинаково отстоящие от середины, имеют равные тяжести и прямые, заключающиеся между их центрами, равны, то для величины, составленной из всех этих величин, центром тяжести будет точка, которая является центром тяжести для средней из них.

Следствие 2

Также если эти величины будут в четном количестве, причем их центры тяжести лежат на одной прямой, и как средние величины, так и одинаково от них отстоящие имеют равную тяжесть, а прямые между центрами равны, то для величины, составленной из всех этих величин, центром тяжести будет середина прямой, соединяющей центры тяжести этих величин, как нарисовано ниже [рис. 2].

VI. *Соизмеримые величины уравновешиваются на длинах, которые обратно пропорциональны тяжестям.*

Пусть А, В будут соизмеримые величины, центры которых А, В. Возьмем некоторую длину Е△, причем пусть как А [относится] к В, так будет и длина △Г [относиться] к длине ГЕ [рис. 3]. Требуется доказать, что для величины, составленной из обеих величин АВ, центром тяжести будет Г.

Действительно, поскольку А относится к В как ΔГ к ЕГ

$$\frac{A}{B}=\frac{\Delta\Gamma}{E\Gamma}$$

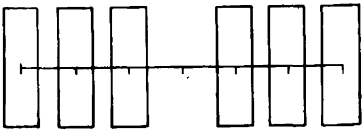

Рис. 2

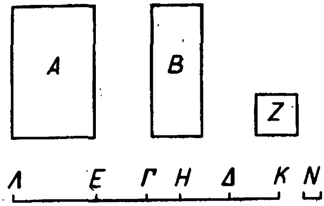

Рис. 3

и А соизмерима с В, то, значит, ΔΓ соизмерима с ΕΓ, т. е. прямая соизмерима с прямой, так что у ΕΓ, ΔΓ есть общая мера. Пусть она будет N; отложим ΔΗ, ΔΚ, равные каждая ΕΓ, и ΕΛ, равную ΔΓ.

Тогда, поскольку ΔΗ равна ΕΓ, и ΔΓ равна ΕΗ, так что и ΔΕ равна ΕΗ.

Значит, ΛΗ вдвое больше ΔΓ, а ΗΚ вдвое больше ΕΓ, так что N измерит и каждую из ΛΗ, ΗΚ, поскольку она измеряет их половины. И поскольку как А относится к В, так и ΔΓ к ΕΓ, т. е.

$$\frac{A}{B}=\frac{\Delta\Gamma}{E\Gamma},\quad \frac{\Delta\Gamma}{E\Gamma}=\frac{\Lambda H}{HK}$$

(так как каждая из вторых вдвое больше соответствующей из первых прямых), значит $\frac{A}{B}=\frac{\Lambda H}{HK}$. Пусть А во столько раз больше Z, во сколько ΛΗ больше N. Тогда $\frac{\Lambda H}{N}=\frac{A}{Z}$. Так же $\frac{HK}{\Lambda H}=\frac{B}{A}$ и тогда «по равенству» $\frac{HK}{N}=\frac{B}{Z}$. Значит, ΗΚ от N и В от Z будут равнократными. Доказано, что и А есть кратное Z, так что Z будет общей мерой для А, В. Если мы разделим прямую ΛΗ на части, равные N, величину А — на части, равные Z, то равновеликие N отрезки в ΛΗ будут в равном количестве с частями в А, равными Z. Таким образом, если на каждый из содержащихся в ΛΗ отрезков наложить величину, равную Z, так, чтобы она имела центр тяжести в середине отрезка, то все эти величины вместе будут равны А и для составленной из всех их величины центром тяжести будет Е, так как все они будут в четном числе и в одинаковом количестве с каждой стороны от Е вследствие того, что ΛΕ равна ΕΗ.

Подобным же образом докажем, что если на каждый из содержащихся в ΗΚ отрезков наложить величину, равную Z, так, чтобы она имела центр тяжести в середине отрезка, то все эти величины вместе будут равны В, и для составленной из всех их величины центром тяжести будет Δ; тогда величина А будет наложена в Е, величина же В — в Δ. Таким образом, получатся равные друг другу величины, расположенные по прямой, центры тяжести которых равноудалены друг от друга, причем в четном числе. Ясно, что для составленной из всех их величины центром

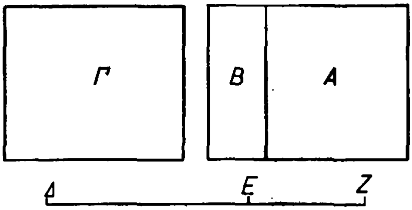

Рис. 4

тяжести будет точка, делящая пополам прямую, на которой находятся центры промежуточных величин. Поскольку ΛЕ равна ΔГ, а ЕГ равна ΔК, значит, и вся ΛГ будет равна ГК; так что для составленной из всех величин центром тяжести будет точка Г. Итак, если А приложить в Е, а В в Δ, то А и В будут находиться в равновесии по отношению к Г.

VII. *Если величины будут несоизмеримыми, то они точно так же уравновесятся на длинах, которые обратно пропорциональны этим величинам.*

Пусть АВ, Г — несоизмеримые величины, а ΔЕ, EZ — длины, и пусть АВ имеет к Г то же самое отношение, что длина ΔЕ к длине EZ [рис. 4]; я утверждаю, что для величины, составленной из обоих АВ, Г, центром тяжести будет Е. Действительно, если АВ, помещенная в Z, не уравновесится с Г, помещенной в Δ, то АВ или будет больше, чем нужно для равновесия с Г, или нет.

Пусть она будет больше; отнимем от АВ меньше того избытка, на который АВ больше, чем нужно для равновесия с Г, так чтобы остаток А был соизмерим с Г. Поскольку теперь величины А, Г соизмеримы и А имеет к Г отношение меньшее, чем ΔЕ к EZ, то А и Г не уравновесятся на длинах ΔЕ, EZ, если А поместить в Z, а Г в Δ. Таким же образом докажем и в том случае, когда Г будет больше того, что нужно для равновесия с АВ[2].

О плавающих телах

КНИГА 1

Предположим, что жидкость имеет такую природу, что из ее частиц, расположенных на одинаковом уровне и прилежащих друг к другу, менее сдавленные выталкиваются более сдавленными и что каждая из ее частиц сдавливается жидкостью, находящейся над ней по отвесу, если только жидкость не заключена в каком-нибудь сосуде и не сдавливается еще чем-нибудь другим. ⟨...⟩

II. *Поверхность всякой жидкости, установившейся неподвижно, будет иметь форму шара, центр которого совпадает с центром Земли.* ⟨...⟩

III. *Тела, равнотяжелые с жидкостью, будучи опущены в эту жидкость, погружаются так, что никакая их часть не выступает над поверхностью жидкости и они не будут двигаться вниз.*

Опустим в жидкость какое-нибудь тело из равнотяжелых с этой жидкостью, и пусть, если возможно, некоторая часть его будет выступать над поверхностью жидкости. Пусть жидкость установится в таком положении, что будет оставаться неподвижной. Вообразим некоторую плоскость, проведенную через центр Земли К, через жидкость и через это тело. Пусть дуга АВГΔ — ее пересечение с поверхностью жидкости [рис. 5], а фигура ΕΖΘΗ — с рассматриваемым телом. Тогда часть ΒΔΘΗ тела будет в жидкости, часть ΒΔΕΖ — вне ее. Вообразим, что тело охвачено пирамидообразной фигурой, имеющей в основании на поверхности воды параллелограмм, а вершиной — центр Земли. Пусть КΛ и КМ — сечения граней пирамиды с той плоскостью, в которой находится дуга *АВГΔ*. Около центра К опишем еще одну шаровую поверхность так, чтобы она проходила внутри жидкости и ниже тела ΕΖΘΗ, и рассечем ее плоскостью. Затем возьмем другую пирамиду, равную и подобную той, которая охватывает погруженное тело, и смежную с ней. Пусть КМ и ΚΝ — сечения ее граней. В жидкости вообразим некоторый объем РΓΤΣ, охваченный жидкостью, равный и подобный части ΒΘΗ первого тела, погруженной в жидкость. Тогда частицы жидкости в первой пирамиде, расположенные под той частью поверхности, где находится дуга ΟΞ, а также соответствующие частицы в другой пирамиде, где находится дуга ΟΠ, будут лежать на одном уровне и в непрерывной связи друг с другом. Однако они не испытывают одинакового давления. Действительно, те частицы, которые расположены по ΟΞ, сдавливаются телом ΕΖΘΗ и той жидкостью, которая находится между поверхностями ΟΞ, ΛΜ и гранями первой пирамиды, те же, которые расположены по ΟΠ, сдавливаются жидкостью, находящейся между поверхностями ΟΠ, ΜΝ и гранями второй пирамиды. Тогда давление на жидкость, находящуюся между ΟΠ и ΜΝ, будет меньше, так как [объем] РΓΤΣ меньше тела ΕΖΘΗ, ибо этому [объему] равна только часть ΒΘΗ, и она предполагается одинаковой по величине и равнотяжелой ⟨с жидкостью, а остальные части в обеих пирамидах одинаковы⟩[3]. Теперь ясно, что часть жидкости, которая соответствует дуге ΟΠ, будет вытолкнута той частью, которая соответствует дуге ΟΞ, и жидкость никак не будет неподвижной. Было же предложено, что она неподвижна; значит, никакая часть тела не будет выступать над поверхностью жидкости. Погрузившись же, тело не будет двигаться вниз, так как все части жидкости, находящиеся на одном уровне, будут давить одинаково вследствие того, что тело является равнотяжелым с жидкостью[4].

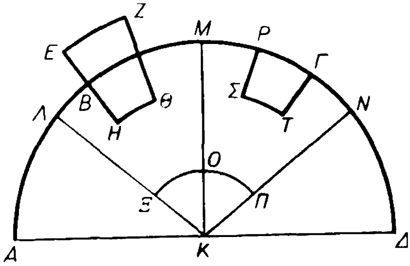

Рис. 5

IV. *Тело более легкое, чем жидкость, будучи опущено в эту жидкость, не погружается целиком, но некоторая часть его остается над поверхностью жидкости.* ⟨...⟩.

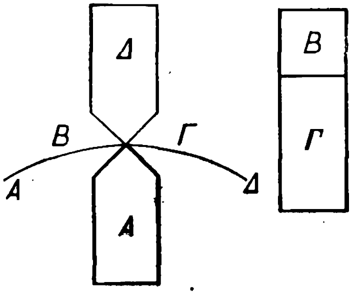

Рис. 6

V. *Тело более легкое, чем жидкость, будучи опущено в эту жидкость, погружается настолько, чтобы объем жидкости, соответствующий погруженной [части тела], имел вес, равный весу всего тела.* ⟨...⟩

VI. *Тела более легкие, чем жидкость, опущенные в эту жидкость насильно, будут выталкиваться вверх с силой, равной тому весу, на который жидкость, имеющая равный объем с телом, будет тяжелее этого тела.*

Пусть имеется некоторое тело А [рис. 6], более легкое, чем жидкость; В — вес тела А, а В+Г — вес жидкости в объеме А. Требуется доказать, что насильно погруженное в жидкость тело А будет выталкиваться вверх с силой, равной весу Г.

Возьмем какое-нибудь тело Δ, имеющее вес, равный Г. Тогда тело, составленное из обоих тел А и Δ, будет легче жидкости [в том же объеме], так как вес составного тела будет В+Г, вес же жидкости в равном объеме будет больше, чем В+Г, так как В+Г представляет вес [жидкости] в объеме, равном А. Теперь тело, составленное из тел А, Δ, будучи опущено в жидкость, погрузится настолько, чтобы жидкость в объеме, равном погруженной части, имела вес, равный весу всего тела, как это доказано выше.

Пусть дуга АВГΔ — поверхность некоторой жидкости. Так как количество жидкости в объеме, равном телу А, имеет вес, равный весу тел А, Δ, то ясно, что погруженная часть этого тела будет иметь объем, равный А, остальная же часть его, именно Δ, будет находиться над поверхностью жидкости. Действительно, если бы это тело погрузилось иначе, то получилось бы [противоречие] с тем, что было доказано [раньше]. Теперь ясно, что [с какой силой] тело А выталкивается кверху, [с такой же силой оно будет придавливаться] книзу находящимся над ним телом Δ, поскольку ни то, ни другое не пересиливают друг друга. Но Δ давит вниз с тяжестью, равной весу Г, так как было предположено, что вес тела Δ равен Г; теперь то, что требовалось доказать, будет очевидно.

VII. *Тела более тяжелые, чем жидкость, опущенные в эту жидкость, будут погружаться, пока не дойдут до самого низа и в жидкости станут легче на величину веса жидкости в объеме, равном объему погруженного тела.*

Что тело будет погружаться, пока не дойдет до самого дна, очевидно, так как находящиеся под ним частицы жидкости будут испытывать большее давление, чем другие, расположенные на одном с ним уровне, так как тело предполагается более тяжелым, чем жидкость; а что оно, как сказано, [в жидкости] станет легче, это следует доказать.

Пусть имеется некоторое тело А [рис. 7], более тяжелое, чем жидкость. Пусть вес тела А будет В + Г, вес же жидкости в объме, равном А, будет В. Требуется доказать, что тело А, находясь в жидкости, будет иметь вес, равный Г.

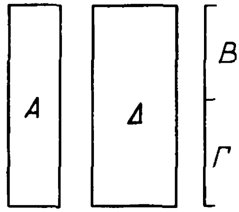

Рис. 7

Возьмем некоторое тело Δ, [более легкое, чем жидкость в его объеме; пусть] вес тела Δ будет равен весу В, вес же жидкости, имеющей одинаковый с телом Δ объем, пусть будет равен весу В + Г. Если мы сложим оба наши тела А и Δ в одно, то составное тело будет равнотяжелым с жидкостью; действительно, вес обоих этих тел равен вместе взятым весам В + Г и В, вес же жидкости, имеющей объем составного тела, равен тем же самым весам. Значит, если эти тела опустить в жидкость, то они будут в равновесии с жидкостью и не будут двигаться ни вверх, ни вниз. Вследствие этого тело А пойдет вниз с такой же силой, с какой тело Δ будет увлекаться вверх. Тело Δ, поскольку оно легче жидкости, будет двигаться вверх с силой, равной весу Г, так как доказано, что более легкие, чем жидкость, тела, будучи насильно погружены в эту жидкость, движутся вверх с силой, равной тому весу, на который жидкость, имеющая объем, равный этому телу, будет тяжелее последнего. Но жидкость, имеющая равный объем с телом Δ, будет тяжелее тела Δ на вес Г. Теперь ясно, что тело А будет двигаться вниз [с силой, равной весу Г]. ⟨...⟩

Комментарий

Перевод с латинского работ Архимеда выполнен И. Н. Веселовским. Отрывки воспроизводятся по изданию: Архимед. Сочинения. М., 1962.

1 Т. е. конгруэнтных, так как геометрическое равенство греки понимали в смысле равновеликости.

2 Доказательство должно быть дополнено так. Если мы от АВ отнимем В так, что А, являясь соизмеримой с Г, все же будет перевешивать последнюю, то отношение А к Г должно быть больше отношения Е к Е. В самом деле, при равновесии относительно точки Е мы имели бы равенство $\frac{A}{\Gamma} = \frac{E\Delta}{EZ}$, если же А перевешивает, то $\frac{A}{\Gamma} > \frac{E\Delta}{EZ}$; но в действительности $\frac{A}{\Gamma} < \frac{E\Delta}{EZ}$, так как $\frac{E}{F} = \frac{A+B}{\Gamma}$; полученное противоречие и доказывает теорему.

3 Фраза в скобках, по-видимому, представляет позднейшую вставку; во всяком случае, слова «одинаковой по величине» совершенно излишни.

4 Это место иногда толковали в том смысле, что рав-

нотяжелое с жидкостью тело будет в равновесии только у поверхности жидкости, а не в любом положении внутри жидкости, и соответственно упрекали Архимеда в ошибке. Такого рода толкование не является необходимым; дальнейшие слова об одинаковости давления, т. е. об отсутствии побудительной силы для движения, показывают, что мысль Архимеда заключалась в том, что движение вниз считалось невозможным именно вследствие отсутствия причины их движения.

Литература

[1] Собрание сочинений Архимеда:
Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. Ed. J. L. Heiberg. Vols. 1—3. Leipzig, 1880—1881.
[2] Лурье С. Я. Архимед. М.—Л., 1945.
[3] Веселовский И. Н. Архимед. М., 1957.
[4] Житомирский С. В. Архимед. М., 1981.

Голин Г. М., Филонович С. Р.
Классики физической науки (с древнейших времен до начала XX в.): Справ. пособие. — М.: Высш. шк., 1989. — 576 с.: ил. ISBN 5-06-000058-3